

裂纹扩展过程的动态仿真技术

陈卫忠^{1,2}, 陈培帅², 王 辉²

(1. 山东大学 岩土与结构工程研究中心, 济南 250061; 2. 中国科学院武汉岩土力学研究所, 武汉 430071)

摘 要: 岩石断裂力学在岩土工程领域应用越来越广泛, 其数值模拟技术是研究的主要方向之一, 也是制约断裂力学发展的瓶颈。基于扩展有限元思想, 依托 ABAQUS 用户子单元二次开发技术, 引入 Heaviside 函数模拟不连续位移场, 采用裂尖逼近函数模拟裂尖位移场, 通过 J 积分求解裂尖的应力强度因子 (SIF), 最后采用最大周向应力准则, 预测裂纹扩展方向, 实现了裂纹动态演化过程的扩展有限元数值模拟。通过 3 个经典断裂力学模型, 对比了计算值与理论值, 验证了所开发程序的适用性和有效性。

关 键 词: 扩展有限元; ABAQUS; 用户子单元; 裂纹

中图分类号: TU 4452; TB115

文献标识码: A

Dynamic simulation technology for crack extension process

CHEN Wei-zhong^{1,2}, CHEN Pei-shuai², WANG Hui²

(1. Geotechnical & structural Engineering Research Center of Shandong University, Jinan 250061, China;

2. Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China)

Abstract: Rock fracture mechanics is used widely in geotechnical engineering. Fracture's simulation technology is one of the main directions of research; but also a bottleneck restricts the development of fracture mechanics. This problem can be solved relying on the secondary development of ABAQUS. It is based on the extended finite element idea. It is possible to simulate the discontinuous displacement field through the introduction of Heaviside function. Also the crack tip displacement field can be simulated by introducing crack tip approximation function. Then it is easy to solve stress intensity factor (SIF) by J integral. Finally, crack growth direction is predicted by using the max circumferential stress criterion. Through three classic models of fracture mechanics, it is easy to verify the feasibility and accuracy of this method by comparing the calculated values with the theoretical values.

Key words: extended finite element; ABAQUS; user subelement; crack

1 引 言

岩石断裂力学是力学与地学、岩土工程的交叉学科, 应用十分广泛, 除建筑、大坝、核电站地基、隧道等岩土工程外, 还涉及到断层破裂问题, 其研究对象是含有裂纹型缺陷的岩石材料中的应力分析、材料强度以及裂纹的扩展规律, 它是近年来迅速发展起来的固体力学的一个新的分支, 却在岩土工程领域中获得广泛的运用。岩石断裂理论和基于断裂准则的数值模拟技术是岩石断裂力学的两个主要研究方向^[1-2], 其中断裂的数值模拟方法是验证

断裂准则的非常有效的方法。

目前断裂数值模拟方法包括有限元、无网格伽辽金法以及数值流形等方法, 有限元在数值模拟领域的应用最为广泛^[3-4]。工程分析中有限元法与其他数值方法相比, 具有一些无法比拟的优点。然而, 传统有限元法的单元位移场形函数是连续函数, 而裂纹扩展是一种不连续问题, 采用传统有限元法处理裂纹扩展问题时需要适时重新调整网格的划分, 保持单元边界与裂纹面重合, 这个过程加大了数值模拟的工作量。同时, 由于模拟过程对网格的高度依赖性, 不能准确地描述裂纹扩展过程及其

尖端的应力位移场。

1999年美国西北大学Belytschko教授领导的课题组首先提出了扩展有限元法(extended finite element method, XFEM)的思想^[5],基于单位分解思想的数值方法,利用有限元的形函数作为单位分解函数,通过引入非连续位移模式描述不连续位移场,克服了在裂纹处进行高密度网格划分所产生的困难,从而模拟裂纹生长时无需对网格进行重新剖分。它继承了常规有限元法(CFEM)的所有优点,在模拟界面、裂纹生长、复杂流体等不连续问题时特别有效,短短几年间得到了快速发展与应用。

本文依托 ABAQUS 强大的用户子单元二次开发技术,实现了 FEM 与 XFEM 的耦合技术,可以很好地进行裂纹的动态模拟,弥补了有限单元法在模拟不连续位移场方面的不足,也为其他商业软件的 XFEM 实现方法提供了借鉴。

2 扩展有限元原理

扩展有限元的理论是基于单位分解思想的数值方法^[6],利用有限元的形函数作为一组单位分解函数,通过引入非连续位移模式描述不连续位移场。在裂纹动态演化过程中,通过水平集函数适时定位裂纹位置,从而将模型单元划分为常规单元、贯穿单元和裂尖单元(贯穿单元和裂尖单元统称断裂单元),通过在断裂单元中引入不连续形函数,反映断裂过程中位移的不连续性。根据应力计算结果,采用 J 积分求得裂尖的应力强度因子,如果应力强度因子满足扩展条件,则通过最大周向应力计算裂纹下一步的扩展方向。

2.1 不连续位移场

扩展有限元与有限元进行耦合分析时,将单元和节点分别划分为 3 个集合:①常规单元,对应常规节点,单节点自由度为 2;②裂纹贯穿单元,对应加强节点,单节点自由度为 4(2 个附加自由度);③裂尖单元,对应裂尖节点,单节点的自由度为 10(8 个附加自由度)。

如图 1 所示,采用水平集算法对单元和节点类别进行划分(具体划分方法将在下节讨论)^[7-8]: B 、 C 、 D 、 E 为裂纹贯穿单元,贯穿单元上的方形节点为加强节点; A 、 F 为裂尖单元,裂尖单元上的圆形节点为裂尖节点。

定义裂纹面的水平集函数 $L(x, y)$, 其 0 水平集 $L(x, y) = 0$ 定表示裂纹位置,定义单元不连续函数 $\Psi_i(x, y) = H(L(x, y))$, 用来描述裂纹贯穿单元的不连续位移场,其中 H 为 Heaviside 间断函数:

$$H(x) = \begin{cases} +1, & (x > 0) \\ -1, & (x < 0) \end{cases} \quad (1)$$

仅用 Heaviside 间断函数无法准确模拟单元裂尖处的位移场。现以裂尖点为极点建立局部极坐标系, r 、 θ 分别为相应的极坐标,采取如下形式的裂尖逼近函数来反映裂尖位移场^[5]:

$$[T_a(x, y), a = 1 \sim 4] = \left[\sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\theta, \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\theta \right] \quad (2)$$

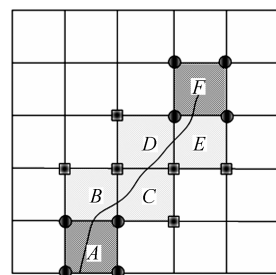


图 1 单元节点归类

Fig.1 Classified the nodes of element

含裂纹单元的位移场为三部分之和,即常规连续位移场、贯穿单元的不连续位移场和裂尖逼近位移场:

$$U = U_{\text{Comm}} + U_{\text{Heav}} + U_{\text{Tip}} \quad (3)$$

其中:

$$\left. \begin{aligned} U_{\text{Comm}} &= \sum_{i=1}^{n_1} N_i(x, y) U_i \\ U_{\text{Heav}} &= \sum_{i=1}^{n_2} N_i(x, y) \Psi_i(x, y) a_i \\ U_{\text{Tip}} &= \sum_{i=1}^{n_3} \left[N_i(x, y) \sum_{a=1}^4 T_a(x, y) b_{ia} \right] \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中: n_1 、 n_2 、 n_3 分别为单元中常规节点、加强节点和裂尖节点的数目; $N_i(x, y)$ 为有限元常规形函数; U_i 为节点的常规位移; a_i 为加强节点的附加位移场; b_{ia} 为裂尖节点的附加位移场。

2.2 裂纹动态演化过程

水平集方法(level set method)是在研究曲线演化时提出来的^[9],用于描述曲线的演化过程,最早被用于研究运动界面追踪的问题,其原理是:将随时间变化的物质界面定义为函数 $\phi(x, t)$ 的 0 等值线(面),在时刻 t 求出 $\phi(x, t)$ 的值即可计算出等值面的位置,即可确定物质界面的位置。

用水平集函数描述裂纹位置时,由于裂纹的扩展只与应力的变化有关,与时间 t 没有关系,对于

这种静态曲线问题, 水平集函数中 t 取值为 0 或者将时间 t 演化为裂纹扩展步数, 等值线 φ 演化为裂纹位置, 即可在计算中追踪裂纹的动态演化过程。

裂纹水平集函数 $\varphi(x)$ 的取法有很多种, 简单的方法是将 $\varphi(x)$ 构造为裂纹曲线 L 的符号距离函数^[3], 即 $\varphi(x)$ 的值是点 x 到曲线的最短距离:

$$\varphi(x) = \pm \min_{x_L \in L} \|x - x_L\| = \begin{cases} d(x, L(0)_+), & x \in L(0)_+ \\ 0, & x \in L(0) \\ -d(x, L(0)_-), & x \in L(0)_- \end{cases} \quad (5)$$

式中: x_L 为裂纹上的动态点, $L(0)_+$ 、 $L(0)_-$ 分别为裂纹分割的两个区域。

扩展有限元实现过程中采用水平集函数对单元和节点进行分类, 如图 2 所示, 计算中采用两种水平集函数分别表示裂纹和裂尖位置: 一种是裂纹线 0 水平集, 即 $\varphi = 0$; 另一种是与裂尖点有关的水平集函数, 定义裂尖点为 A , 单元节点为 B , 裂纹在裂尖点的切向为 $\vec{n}$, 令 $\psi = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}$, 则裂尖法向 0 水平集 $\psi = 0$ 。

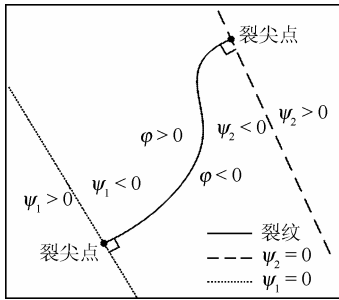


图 2 裂纹和裂尖水平集函数曲线

Fig.2 The level set function curve of crack and crack tip

以平面 4 节点四边形单元为例, 对模型有限单元进行循环计算, 计算 4 个节点的裂纹水平集函数值 φ 和裂尖水平集函数值 ψ , 取水平集函数的最大值 $\varphi_{\max}$ 、 $\psi_{\max}$ 和最小值 $\varphi_{\min}$ 、 $\psi_{\min}$, 则单元与节点类型的分类标准为^[11]: ①若满足条件: $\varphi_{\max}\varphi_{\min} > 0$, 则此单元为常规单元, 对应的 4 个节点为常规节点, 单个节点的附加自由度为 0。②若满足条件: $\psi_{\max} < 0$ 和 $\psi_{\min} < 0$ 且 $\varphi_{\max}\varphi_{\min} < 0$, 则此单元为裂纹贯穿单元, 对应的 4 个节点为裂纹加强节点, 单个节点的附加自由度为 4。③若满足条件: $\psi_{\max}\psi_{\min} < 0$ 且 $\varphi_{\max}\varphi_{\min} < 0$, 则此单元为裂尖单元, 对应的 4 个节点为裂尖加强节点, 单个节点的附加自由度为 8。

2.3 裂纹的扩展方向和扩展条件

断裂判据是裂纹扩展的核心问题, 主要解决两方面的问题: ①裂纹的扩展方向; ②裂纹继续扩展

的条件。在数值模拟中, 加入裂纹扩展条件是非常容易的, 本文主要研究裂纹的动态演化效果, 因而暂不考虑裂纹的扩展条件, 定义每个扩展步裂纹演化长度为定值。

裂纹扩展准则有: ①最大能量释放率准则; ②最大周向应力或者最大主应力准则; ③最小应变能密度准则。本文采用最大周向应力准则, 即裂纹从裂尖开始, 沿着最大周向应力的方向扩展^[11], 由经典断裂力学理论可知, 裂纹扩展的方向角为

$$\theta_c = 2 \arctan \frac{1}{4} \left(K_I/K_{II} \pm \sqrt{(K_I/K_{II})^2 + 8} \right) \quad (6)$$

由式 (6) 可知, 求解应力强度因子是确定裂纹扩展方向的关键, 本文采用由 Rice 提出的 J 积分法计算应力强度因子, J 积分是围绕裂纹尖端的与路径无关的线积分, 其证明过程参考文献^[11]。

本文仅讨论二维裂纹扩展, 即 $K_{III} = 0$, 拟通过交互积分的域积分形式计算 K_I 和 K_{II} , 计算采用局部坐标系, x 轴平行裂纹面。对于混合型裂纹, J 积分与应力强度因子的关系为^[5]:

$$J = \frac{K_I^2}{E^*} + \frac{K_{II}^2}{E^*} \quad (7)$$

现考虑裂尖附近两个应力场, 一个是当前的应力状态 $(\sigma_{ij}^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(1)}, u_i^{(1)})$, 另一个是附加的渐近应力场 $(\sigma_{ij}^{(2)}, \varepsilon_{ij}^{(2)}, u_i^{(2)})$, 两种应力状态的综合 J 积分为

$$J^{(1+2)} = \left[\int_{\Gamma} \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) (\varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)}) \delta_{1j} - (\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) \frac{\partial (u_i^{(1)} + u_i^{(2)})}{\partial x_1} \right] n_j d\Gamma \quad (8)$$

对式 (8) 进行分解重组, 可写作:

$$J^{(1,2)} = J^{(1)} + J^{(2)} + I^{(1,2)} \quad (9)$$

式中: $I^{(1,2)}$ 为应力状态 1 和状态 2 的交互积分:

$$I^{(1,2)} = \int_{\Gamma} \left[W^{(1,2)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial (u_i^{(2)})}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial (u_i^{(1)})}{\partial x_1} \right] n_j d\Gamma \quad (10)$$

式中: $W^{(1,2)}$ 为交互应变能:

$$W^{(1,2)} = \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} = \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)} \quad (11)$$

组合两种应力状态, 则式 (7) 变为

$$J^{(1,2)} = \frac{(K_I^{(1)} + K_I^{(2)})^2}{E^*} + \frac{(K_{II}^{(1)} + K_{II}^{(2)})^2}{E^*} \quad (12)$$

即

$$J^{(1,2)} = J^{(1)} + J^{(2)} + \frac{2}{E^*} (K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)}) \quad (13)$$

联立方程式 (10) 与方程式 (13) 可知

$$I^{(1,2)} = \frac{2}{E^*} (K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)}) \quad (14)$$

通过调整附加的渐近应力场变量,使其变为纯 I 型裂纹应力状态,即 $K_{II}^{(2)} = 0$ 并且 $K_I^{(2)} = 1$, 则应力状态 1 的 I 型应力强度因子可以用交互积分表示为

$$K_I^{(1)} = \frac{1}{2} E^* I^{(1, \text{mode I})} \quad (15)$$

同样的方法,调整附加的渐近应力场变量,使其变为纯 II 型裂纹应力状态,即 $K_I^{(2)} = 0$, 并且 $K_{II}^{(2)} = 1$, 则状态 1 的 II 型应力强度因子可以用交互积分表示为

$$K_{II}^{(1)} = \frac{1}{2} E^* I^{(1, \text{mode II})} \quad (16)$$

3 ABAQUS 用户子单元实现 XFEM

本文采用 Matlab 软件处理裂纹信息,通过水平集算法确定裂纹位置,完成单元和节点的分类,基于 ABAQUS 用户单元子程序 UEL 引入非连续位移场,并链接到 ABAQUS 主程序进行数值分析,最后通过处理结果文件,计算应力强度因子和裂纹扩展方向,计算流程图见图 3。

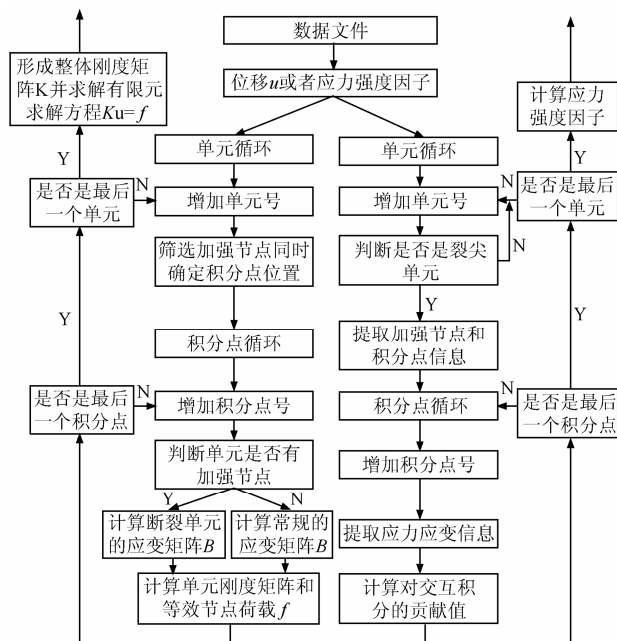


图 3 二次开发流程图

Fig.3 The secondary development flow chart

ABAQUS 不支持用户子单元的,因而后处理存在一定麻烦,本文用标准单元来覆盖用户子单元,将覆盖单元节点与用户子单元节点耦合在一起,取覆盖单元的弹性模量小于常规单元 4 个量级,这样

覆盖单元可以反应出用户子单元的位移情况,同时又不影响原模型的数值分析,后处理中可以通过显隐覆盖单元观察裂纹的动态演化。

4 数值验证

利用编制的程序计算 3 个经典断裂模型^[12],包括 I 型裂纹、混合型裂纹和 3 点弯曲梁,将计算结果与理论解进行比较,以验证编程序的正确性和有效性。

4.1 I 型裂纹

如图 4 所示,模型为长度 $L = 10 \text{ m}$, 宽度 $W = 4 \text{ m}$ 板,材料弹性模量为 10 MPa ,泊松比为 0.3 。模型底端竖向约束,上表面拉伸荷载 $\sigma = 1 \text{ MPa}$,初始边裂纹长度取 a ,当 $a/W \leq 0.6$ 时,应力强度因子的解析解为 $K_I = m\sigma\sqrt{\pi a}$ ^[13], 其中

$$m = 1.12 - 0.231(a/W) + 10.55(a/W)^2 - 21.72(a/W)^3 + 30.39(a/W)^4 \quad (17)$$

计算过程中,初始裂纹长度 a 分别取 0.3 、 0.6 、 0.9 、 1.2 、 1.5 、 1.8 、 2.1 、 2.4 , 应力强度因子统计结果见表 1。

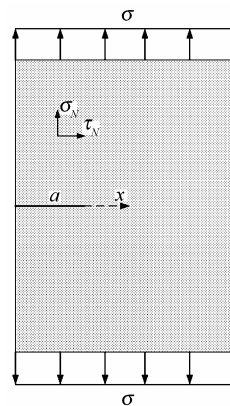


图 4 水平边裂纹平板受拉模型

Fig.4 Plate with horizontal edge crack under tensile stress

表 1 不同裂纹长度下理论值与计算值

Table 1 Theoretical and calculated values under different lengths of crack

裂纹长度 / m	k_I 理论值 /(MPa · m ^{1/2})	k_I 计算值 /(MPa · m ^{1/2})	误差 / %
0.3	1.120	1.085	3.152
0.6	1.737	1.632	6.045
0.9	2.409	2.422	0.540
1.2	3.223	3.304	2.513
1.5	4.282	4.397	2.686
1.8	5.753	5.886	2.312
2.1	7.891	8.014	1.559
2.4	11.056	11.227	1.547

图 5 为 K_I 理论值与计算值拟合曲线。由图可

以看出, 应力强度因子的计算结果和理论解非常接近^[14], 平均误差控制在 3% 左右。

仍采用上面的模型, 取裂纹初始长度为 0.4 m, 定义 11 个扩展步, 单个扩展步裂纹演化长度为 0.1 m, 得到结算结果如图 5 所示, 裂纹近似水平向演化, 在裂纹附近, 单元表现出明显的位移不连续, 裂纹尖端有明显的应力集中现象, 裂纹扩展的最终形态与文献[11]的试验结果相吻合。

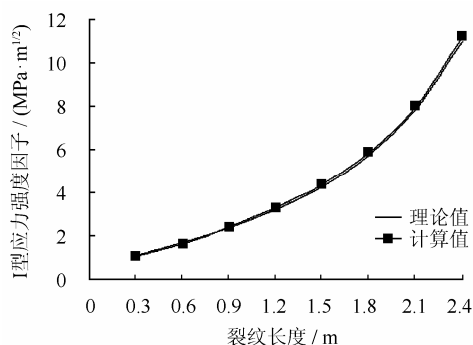


图 5 理论值与计算值比较

Fig.5 Theoretical values comparing with the calculated ones

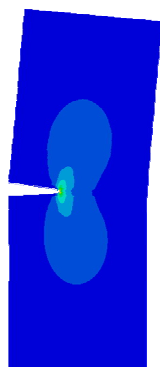


图 6 裂纹演化结束后的 Mises 应力图

Fig.6 Mises stress diagram at the end of the crack evolution

4.2 混合型裂纹

在研究混合型裂纹的断裂准则时, 采用图 7 所

示带斜裂纹的平板模型, 模型尺寸同 4.1 章节, 模型底端竖向约束, 上表面加拉伸荷载 $\sigma = 1$ MPa, 初始裂纹长度取 $2a = 1.2$, 应力强度因子的解析解为

$$\left. \begin{aligned} K_I &= \sigma \sqrt{\pi a} \cos^2 \beta \\ K_{II} &= \sigma \sqrt{\pi a} \cos \beta \sin \beta \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

式中: β 为裂纹角。断裂角 θ 与裂纹角 β 的关系为 $\sin \theta + (3 \cos \theta - 1) \tan \beta = 0$ 。

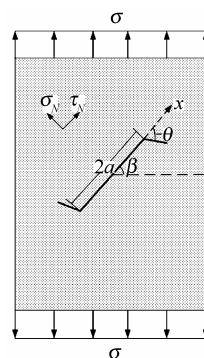


图 7 斜裂纹平板受拉模型

Fig.7 Plate with inclined edge crack under tensile stress

本例分别计算裂纹角为 0° 、 10° 、 20° 、 30° 、 40° 、 50° 、 60° 、 70° 、 80° 、 90° 下的断裂角, 其中裂纹角为 90° 时, 计算断裂角理论值时, $\tan \beta \rightarrow \infty$, 则 $3 \cos \theta - 1 = 0$, 则 $\theta = 70.32^\circ$, 计算结果见表 2。

由图 8、9 可知, 自编 XFEM 计算的应力强度因子与裂纹角精度非常高^[15], 计算值与理论值相比, 应力强度因子平均误差控制在 5% 左右, 断裂角误差控制在 1% 以下。当 $\beta = 0^\circ$ 时, $K_{II} = 0$, 转化为 I 型裂纹, 断裂角方向为裂纹延长线方向; 断裂角 β 在开区间 $(-\pi/2, \pi/2)$ 范围时, 采用最大周向应力理论计算的 K_I 与 K_{II} 均不为 0, 验证了带斜裂纹平板在拉伸应力下的拉剪复合型裂纹特性, 其中当 $\beta = 45^\circ$ 时, $K_I = K_{II}$; 当 $\beta = 90^\circ$ 时, $K_I \rightarrow 0$, 转化为 II 型裂纹, 断裂角方向为 70.19° 。

表 2 不同裂纹角下的计算值与理论值

Table 2 Theoretical and calculated values under diffirent cracking angles

裂纹角度 / $^\circ$	K1 理论值 /(MPa·m ^{1/2})	K1 计算值 /(MPa·m ^{1/2})	K2 理论值 /(MPa·m ^{1/2})	K2 计算值 /(MPa·m ^{1/2})	断裂角理论值 / $^\circ$	断裂角计算值 / $^\circ$
0	1.373	1.475	0	0	0	0
10	1.332	1.440	0.235	0.248	18.911	18.545
20	1.212	1.188	0.441	0.413	33.285	32.280
30	1.030	1.094	0.595	0.608	43.221	42.413
40	0.806	0.838	0.676	0.656	50.288	49.072
50	0.567	0.582	0.676	0.686	55.650	55.500
60	0.343	0.377	0.595	0.619	60.000	59.455
70	0.161	0.148	0.441	0.406	63.759	63.738
80	0.041	0.047	0.235	0.256	67.200	67.040
90	0	0	0	2.61e-3	70.320	70.187

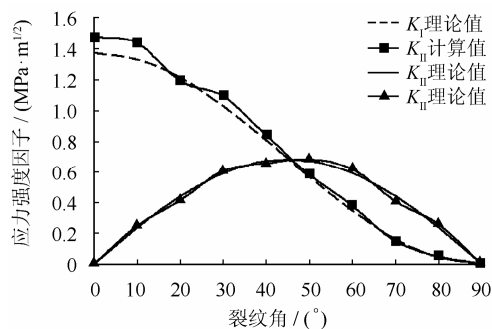


图 8 理论值与计算值比较

Fig.8 Theoretical values comparing with the calculated ones

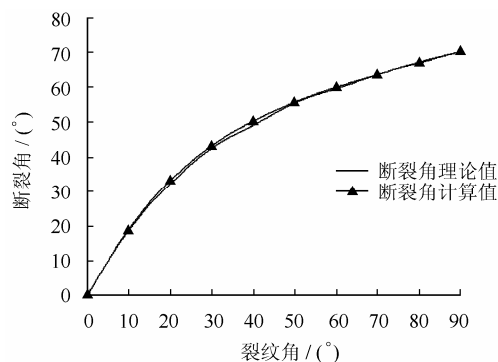


图 9 理论值与计算值比较

Fig.9 Theoretical values comparing with the calculated ones

4.3 3 点弯曲梁数值模拟

为验证程序的有效性, 采取方修君^[8]的计算模型, 对如图10所示的经典3点弯曲梁进行分析。梁左端固支, 右端简支, 在梁的上表面中心点施加集中荷载, 模型尺寸和材料参数为: 梁长10 mm, 梁宽3 mm, 弹性模量 $E = 100$ MPa, 泊松比 $\nu = 0.167$, 抗拉强度 $f_t = 1.0$ MPa。计算开始前, 在梁的下部中心点加入0.05 mm的预设竖向裂纹, 并且追踪此点所在单元的最大主应力, 一旦达到抗拉强度, 立刻激活预设裂纹。

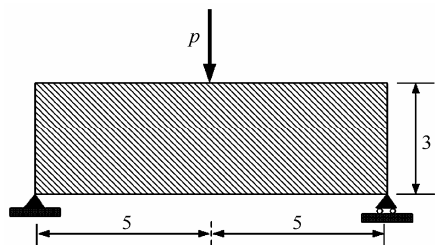


图 10 3 点弯曲梁模型 (单位: mm)

Fig.10 Three-point bending beam(unit: mm)

进行了100个增量步计算如图11所示, 得到集中荷载作用点的荷载位移曲线, 可以看出当荷载达到峰值后, 荷载迅速降低, 而位移还在不断增大,

表现出明显的脆性性质。图12为计算结束后的最大主应力云图, 在裂纹尖端表现出明显的应力集中。

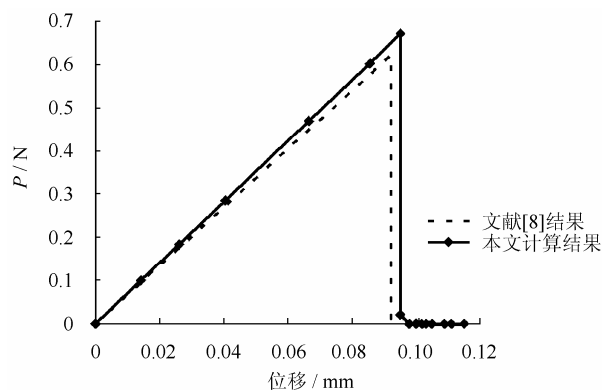


图 11 荷载与位移曲线

Fig.11 Load-displacement curves of 3-point bending beam

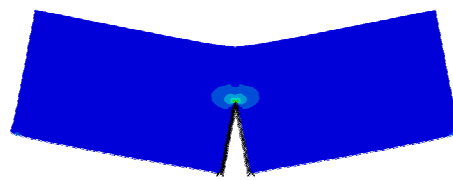


图 12 最大主应力云图

Fig.12 Contour of max principal stress

5 结 语

本文详细阐述了扩展有限元的基本思想, 依托 ABAQUS 的用户子单元二次开发技术, 实现了扩展有限元与有限元的耦合分析技术, 解决了有限单元法模拟不连续位移方面的不足。采用编制的程序进行了静态裂纹和动态扩展裂纹的数值模拟, 分析了应力强度因子和断裂角的理论值。结果表明, 计算值与理论值误差非常小, 验证了程序的可行性和准确性, 本文的研究思路为扩展有限元与其他有限元商业软件的结合提供了很好的思路。

参 考 文 献

- [1] 滕春凯, 尹祥础, 李世愚, 等. 非穿透裂纹平板试件三维破裂的实验研究[J]. 地球物理学报, 1987, 30(4): 371—378.
TENG Chun-kai, YIN Xiang-chu, LI Shi-yu. Experimental study of three dimensional fracture in plane specimens with non-penetrating crack[J]. Acta Geophysica Sinica, 1987, 30(4): 371—378.
- [2] 陈卫忠, 李术才, 邱祥波, 等. 岩石裂纹扩展的实验与数值分析研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2003, 22(1): 18—23.
CHEN Wei-zhong, LI Shu-cai, QIU Xiang-bo. Experimental and numerical research on crack propagation in rock under compression[J]. Chinese Journal of Rock

- Mechanics and Engineering**, 2003, 22 (1): 18—23.
- [3] 李录贤, 王铁军. 扩展有限元法(XFEM)及其应用[J]. 力学进展, 2005, 35(1): 5—20.
LI Lu-xian, WANG Tie-jun. The extended finite element method and its applications——A review[J]. **Advances in Mechanics**, 2005, 35(1): 5—20.
- [4] 李九红, 王雪, 赵钦. 无网格伽辽金法在裂纹扩展中的应用研究[J]. 西安理工大学学报, 2008, 24(4): 476—479.
LI Jiu-hong, WANG Xue, ZHAO Qin. The applied study of the element free galerk in method to crack propagation[J]. **Journal of Xi'an University of Technology**, 2008, 24(4): 476—479.
- [5] MOËS N, DOLBOW J, BELYTSCHKO T. A finite element method for crack growth without remeshing[J]. **Int. J. Numer. Meth. Engng**, 1999, 46(1): 131—50.
- [6] MELENK J M, BABUSKA I. The partition of unity finite element method: basic theory and application[J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 1996, 139: 289—314.
- [7] 余天堂. 扩展有限元法的数值方面[J]. 岩土力学, 2007, 28(增刊 1): 305—310.
YU Tian-tang. Numerical aspects of the extended finite element method[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2007, 28 (Supp. 1): 305—310.
- [8] 方修君, 金峰. 基于 ABAQUS 平台的扩展有限元法[J]. 工程力学, 2007, 24(7): 6—10.
FANG Xiu-jun, JIN Feng. Extended finite element method based on ABAQUS[J]. **Engineering Mechanics**, 2007, 24(7): 6—10.
- [9] SETHIAN J A. Level set methods and fast marching methods: Evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and material science[M]. Cambridge UK: Cambridge University Press, 1999.
- [10] 李世愚. 岩石断裂力学[M]. 北京: 中国科学技术大学出版社, 2010.
- [11] 杨珺. 平面裂纹扩展分析的扩展有限元法[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2007.
- [12] 范天佑. 断裂理论基础[M]. 北京: 科学出版社, 2003.
- [13] ANDERSON T L. Fracture mechanics-fundamentals and applications (2nd ed.)[M]. CRC: Boca Raton, 1995.
- [14] 中国航空研究院. 应力强度因子手册[M]. 北京: 科学出版社出版, 1993.

上接第 572 页

- experiment and fracture mechanism study of propagation of echelon pattern cracks[J]. **Acta Mechanica Sinica**, 1998, 19(4): 355—360.
- [10] 黄凯珠, 林鹏, 唐春安, 等. 双轴加载下断续预置裂纹贯通机制的研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2002, 21(6): 808—816.
HUANG Kai-zhu, LIN Peng, TANG Chun-an, et al. Mechanisms of crack coalescence of pre-existing flaws under biaxial compression[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2002, 21(6): 808—816.
- [11] 陈卫忠, 李术才, 朱维申, 等. 岩石裂纹扩展的实验与数值分析研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2003, 22(1): 18—23.
CHEN Wei-zhong, LI Shu-cai, ZHU Wei-shen, et al. Experimental and numerical research on crack propagation in rock under compression[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2003, 22(1): 18—23.
- [12] MOES N, DOLBOW J, BELYTSCHKO T. A finite element method for crack growth without remeshing[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1999, 46: 131—150.
- [13] BABUSKA I, MELENK J M. The partition of unity method[J]. **International Journal of Numerical Method in Engineering**, 1997, 40: 727—758.
- [14] FLEMING M, CHU Y A, MORAN B, et al. Enriched element-free Galerkin methods for crack tip fields[J]. **International Journal of Numerical Methods in Engineering**, 1997, 40(8): 1483—1504.
- [15] ZAK A R, WILLIAMS M L. Crack point singularities at a biomaterial interface[J]. **Journal of Applied Mechanics**, 1963, 30: 142—143.
- [16] MUSKHELISHVILI N L. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity[M]. Leyden: Noordhoff, 1953.
- [17] ERDOGAN F, SIH G C. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear[J]. **Journal of Basic Engineering**, 1963, 85(4): 519—527.
- [18] 李银平, 杨春和. 裂纹几何特征对压剪复合断裂的影响分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2006, 25(3): 462—466.
LI Yin-ping, YANG Chun-he. Influence of geometric characteristics of pre-existing cracks on mixed mode fracture under compression-shear loading[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2006, 25(3): 462—466.